

HY-280 Θεωρία Υπολογισμού

Θεώρημα Rice

28/11/2025

Οι σημειώσεις αυτές δίνουν ένα θεώρημα το οποίο δηλώνει ότι μία πολύ μεγάλη οικογένεια προβλημάτων είναι όλα μη-διαγνώσιμα. Το αποτέλεσμα μας, γνωστό ως θεώρημα Rice από τον Henry Rice που το απέδειξε το 1953, δηλώνει ότι αν $\mathcal{P}$ είναι μία μη-τετριμμένη ιδιότητα των (κατά Turing) αναγνωρίσιμων γλωσσών, τότε το πρόβλημα :

Δοθέντος ενός TM M , έχει η $L(M)$ την ιδιότητα $\mathcal{P}$;

είναι μη-διαγνώσιμο.

Ένα παράδειγμα ιδιότητας των αναγνωρίσιμων γλωσσών είναι η ιδιότητα του να είναι μια γλώσσα κανονική. Αν είχαμε έναν αλγόριθμο που, δοθείσης μιας TM M , να μπορούσε να διαγνώσει αν η $L(M)$ είναι κανονική, τότε θα είχαμε έναν μηχανισμό με τον οποίο θα μπορούσαμε να αντικαταστήσουμε την M με ένα ισοδύναμο πεπερασμένο αυτόματο.

Θα ήταν επίσης χρήσιμο να μπορούσαμε να καθορίσουμε αν μια TM M δέχεται όλες τις συμβολοσειρές που περιέχουν μια συγκεκριμένη ακολουθία χαρακτήρων. Τότε θα είχαμε ένα εργαλείο για να ελέγχουμε, για παράδειγμα, αν όλα τα δεδομένα που θεωρούμε ορθά όντως υποβάλλονται σε σωστή επεξεργασία.

Δυστυχώς, κάτι τέτοιο δεν είναι δυνατό. Αλγόριθμοι που ελέγχουν ιδιότητες των γλωσσών εισόδου δεν μπορούν να υπάρξουν, όπως θα δούμε αμέσως. Θα το διατυπώσουμε αυστηρά. Δεδομένης μίας μηχανής Turing M με κωδικοποίηση $\langle M \rangle$ ως είσοδο, υπάρχουν πολλά πράγματα που μπορούμε να διαγνώσουμε για την ίδια τη μηχανή M : για παράδειγμα, μπορούμε να απαντήσουμε στο ερώτημα *έχει η $\langle M \rangle$ ακριβώς 17 καταστάσεις*; χωρίς καν να την εκτελέσουμε. Άρα, η γλώσσα όλων των μηχανών Turing που έχουν 17 καταστάσεις είναι διαγνώσιμη.

Ωστόσο δεν μπορούμε να διαγνώσουμε *οτιδήποτε* αφορά τη συμπεριφορά μιας δοσμένης μηχανής Turing: δηλαδή, δεν μπορούμε να διαγνώσουμε καμία ιδιότητα της γλώσσας $L(M)$, αν ως είσοδο έχουμε μόνο την περιγραφή $\langle M \rangle$. Για παράδειγμα, δεν μπορούμε να διαγνώσουμε αν η $L(M)$ είναι κενή ή μη κενή.

Ιδιότητες

Πρώτα, δίνουμε έναν μαθηματικό ορισμό της έννοιας της *ιδιότητας*. Σε αυτές τις σημειώσεις, μια ιδιότητα είναι απλώς μια κλάση από αναγνωρίσιμες γλώσσες.

Ορισμός 1. Μια κλάση γλωσσών $\mathcal{P}$ ονομάζεται **ιδιότητα των αναγνωρίσιμων γλωσσών** αν τα μέλη της είναι αναγνωρίσιμες γλώσσες, δηλαδή για κάθε $L \in \mathcal{P}$ υπάρχει μια μηχανή Turing που αναγνωρίζει την L .

Παράδειγμα 1. Η κλάση γλωσσών

$$\mathcal{P}_{\text{REGULAR}} = \{ L \mid L \text{ είναι κανονική} \}$$

είναι μια ιδιότητα των αναγνωρίσιμων γλωσσών, διότι όλα τα μέλη της είναι αναγνωρίσιμες γλώσσες. Από την άλλη, η κλάση

$$\mathcal{P}_2 = \{\text{EQ}_{\text{TM}}, \text{A}_{\text{TM}}\}$$

δεν είναι ιδιότητα των αναγνωρίσιμων γλωσσών, διότι η EQ_{TM} ανήκει στο $\mathcal{P}_2$ αλλά δεν είναι αναγνωρίσιμη. $\square$

Μια ιδιότητα των αναγνωρίσιμων γλωσσών ονομάζεται **μη-τετριμμένη** όταν κάποιες αναγνωρίσιμες γλώσσες έχουν την ιδιότητα και κάποιες άλλες όχι. Το διατυπώνουμε αυστηρά ως εξής:

Ορισμός 2. Έστω $\mathcal{P}$ μια ιδιότητα των αναγνωρίσιμων γλωσσών. $\mathcal{P}$ είναι **μη-τετριμμένη** αν υπάρχουν αναγνωρίσιμες γλώσσες L_1 και L_2 τέτοιες ώστε $L_1 \in \mathcal{P}$ αλλά $L_2 \notin \mathcal{P}$. Αν μια ιδιότητα δεν είναι μη-τετριμμένη, τότε την ονομάζουμε **τετριμμένη**.

Παράδειγμα 2. Η κλάση

$$\mathcal{P}_{\text{REGULAR}} = \{ L \mid L \text{ είναι κανονική} \}$$

είναι μια μη-τετριμμένη ιδιότητα των αναγνωρίσιμων γλωσσών, διότι η γλώσσα $L_1 = \{0^n \mid n \geq 0\}$ είναι μέλος της $\mathcal{P}_{\text{REGULAR}}$ (και άρα αναγνωρίσιμη), ενώ η γλώσσα $L_2 = \{0^n 1^n \mid n \geq 0\}$ είναι επίσης αναγνωρίσιμη αλλά δεν ανήκει στην $\mathcal{P}_{\text{REGULAR}}$ καθώς είναι μη-κανονική. $\square$

Παράδειγμα 3. Υπάρχουν μόνο δύο τρόποι κατά τους οποίους μια ιδιότητα δεν είναι μη-τετριμμένη. Οι ιδιότητες

$$\mathcal{P}_{\text{all}} = \{ L \mid L \text{ είναι αναγνωρίσιμη} \} \tag{1}$$

$$\mathcal{P}_{\text{none}} = \emptyset \tag{2}$$

είναι και οι δύο τετριμμένες, και είναι οι μόνες τέτοιες ιδιότητες. Η $\mathcal{P}_{\text{all}}$ είναι τετριμμένη, διότι δεν υπάρχει αναγνωρίσιμη γλώσσα L_2 τέτοια ώστε $L_2 \notin \mathcal{P}_{\text{all}}$. Η $\mathcal{P}_{\text{none}}$ είναι τετριμμένη, διότι δεν υπάρχει αναγνωρίσιμη γλώσσα L_1 τέτοια ώστε $L_1 \in \mathcal{P}_{\text{none}}$. $\square$

Παράδειγμα 4. Τα παρακάτω είναι παραδείγματα μη-τετριμμένων ιδιοτήτων των αναγνωρίσιμων γλωσσών:

- Η κλάση $\{\emptyset\}$, της οποίας το μοναδικό μέλος είναι η κενή γλώσσα (να μην συγχέεται με την κενή ιδιότητα $\mathcal{P}_{\text{none}}$ του προηγούμενου παραδείγματος).
- Η κλάση $\{\Sigma^*\}$, της οποίας το μοναδικό μέλος είναι η γλώσσα όλων των συμβολοσειρών πάνω στο αλφάβητο Σ .
- Η κλάση των γλωσσών που περιέχουν την κενή συμβολοσειρά ε ως στοιχείο.
- Η κλάση των χωρίς συμφραζόμενα γλωσσών.
- Η κλάση των διαγνώσιμων γλωσσών. □

Θεώρημα Rice

Ορισμός 3. Έστω $\mathcal{P}$ μια ιδιότητα. Τότε η γλώσσα $\mathcal{P}_{\text{TM}}$ ορίζεται ως:

$$\mathcal{P}_{\text{TM}} = \{\langle M \rangle \mid L(M) \in \mathcal{P}\}.$$

Παράδειγμα 5. Θεωρήστε την ιδιότητα $\mathcal{P}_{\text{REGULAR}}$ που ορίστηκε στο Παράδειγμα 1. Τότε:

$$\mathcal{P}_{\text{TM}} = \{\langle M \rangle \mid L(M) \text{ είναι κανονική γλώσσα}\}.$$

Παρατηρήστε ότι αυτή η γλώσσα είναι η $\text{REGULAR}_{\text{TM}}$. □

Το αποτέλεσμα που θα διατυπώσουμε και θα αποδείξουμε τώρα, αναφέρει ότι η $\mathcal{P}_{\text{TM}}$ είναι μη-διαγνώσιμη όταν η $\mathcal{P}$ είναι μη-τετριμμένη.

Θεώρημα 1 (Θεώρημα Rice). Αν $\mathcal{P}$ είναι μια μη-τετριμμένη ιδιότητα των αναγνωρίσιμων γλωσσών, τότε η $\mathcal{P}_{\text{TM}}$ είναι μη-διαγνώσιμη.

Ιδέα Απόδειξης Θα δείξουμε ότι αν $\mathcal{P}$ είναι μη-τετριμμένη ιδιότητα των αναγνωρίσιμων γλωσσών, τότε μπορούμε να κάνουμε αναγωγή την A_{TM} στην $\mathcal{P}_{\text{TM}}$. Με άλλα λόγια, θα δείξουμε ότι, δοσμένης της εισόδου $\langle M, w \rangle$, μπορούμε να κατασκευάσουμε μια μηχανή M' τέτοια ώστε:

$$M \text{ αποδέχεται το } w \iff L(M') \in \mathcal{P}.$$

Απόδειξη. Γνωρίζουμε ότι η $\mathcal{P}$ είναι μη-τετριμμένη, άρα υπάρχει κάποια γλώσσα $L_1 \in \mathcal{P}$ και κάποια άλλη γλώσσα $L_2 \notin \mathcal{P}$. Στην απόδειξη επιλέγουμε μια τέτοια L_1 και θεωρούμε ότι η

κενή γλώσσα $\emptyset$ είναι η L_2 , δηλαδή ότι $\emptyset \notin \mathcal{P}$. Τότε, δοσμένης της $\langle M, w \rangle$, θα κατασκευάσουμε μια TM M' τέτοια ώστε:

$$M \text{ αποδέχεται το } w \Rightarrow L(M') = L_1, \quad M \text{ δεν αποδέχεται το } w \Rightarrow L(M') = \emptyset.$$

Χωρίς απώλεια της γενικότητας υποθέτουμε ότι $\emptyset \notin \mathcal{P}$ ¹. $\mathcal{P}_{\text{TM}}$ είναι διαγνώσιμη αν και μόνο αν η $\overline{\mathcal{P}}_{\text{TM}}$ είναι επίσης.

Εφόσον η $\mathcal{P}$ είναι μη-τετριμμένη ιδιότητα αναγνωρίσιμων γλωσσών, τότε υπάρχει κάποια $L_1 \in \mathcal{P}$. Επειδή η L_1 είναι αναγνωρίσιμη, υπάρχει TM που την αναγνωρίζει, την οποία συμβολίζουμε ως M_L .

Τώρα περιγράφουμε τη αναγωγή από την A_{TM} στην $\mathcal{P}_{\text{TM}}$. Δοσμένων των $\langle M, w \rangle$ και χρησιμοποιώντας το M_L , κατασκευάζουμε μια νέα μηχανή M' ως εξής:

$M' = \text{Με είσοδο } x :$

1. Προσομοίωσε την M στην w .
2. Αν η M αποδεχθεί την w , τότε προσομοίωσε την M_L στην x .
3. Αν η M_L αποδεχθεί την x , τότε αποδέχεται.'

Απόδειξη Ορθότητας. Αν $\langle M, w \rangle \in A_{\text{TM}}$, δηλαδή η M αποδέχεται την w , τότε η M' θα δέχεται την είσοδό της x ακριβώς όταν η M_L αποδέχεται την x . Άρα, $L(M') = L_1 \in \mathcal{P}$.

Αν $\langle M, w \rangle \notin A_{\text{TM}}$, δηλαδή η M δεν αποδέχεται την w , τότε η M' δεν θα φτάσει ποτέ στο στάδιο της προσομοίωσης της M_L , και άρα δεν θα δεχθεί καμία συμβολοσειρά. Άρα, $L(M') = \emptyset \notin \mathcal{P}$.

Επομένως, η αναγωγή είναι ορθή:

$$\langle M, w \rangle \in A_{\text{TM}} \iff \langle M' \rangle \in \mathcal{P}_{\text{TM}}.$$

Συνεπώς, έστω ότι η $\mathcal{P}_{\text{TM}}$ ήταν διαγνώσιμη. Τότε θα υπήρχε ένας διαγνώστης R για την $\mathcal{P}_{\text{TM}}$. Αλλά τότε θα μπορούσαμε να κατασκευάσουμε τον παρακάτω διαγνώστη για την A_{TM} :

$H = \text{Με είσοδο } \langle M, w \rangle :$

1. Κατασκεύασε την $\langle M' \rangle$ από την $\langle M, w \rangle$.
2. Εκτέλεσε R με είσοδο $\langle M' \rangle$.
3. Αν ο R αποδεχθεί, τότε αποδέχεται. Αν απορρίψει, τότε απορρίπτει.'

Αυτό θα ήταν διαγνώστης για την A_{TM} , πράγμα αδύνατο. Άρα η $\mathcal{P}_{\text{TM}}$ δεν μπορεί να είναι διαγνώσιμη. □

¹Αν θέλαμε να δείξουμε ότι η $\mathcal{P}$ είναι μη-δαγνώσιμη αλλά είχαμε $\emptyset \in \mathcal{P}$, θα μπορούσαμε να εξετάσουμε την συμπληρωματική ιδιότητα $\overline{\mathcal{P}}$.

Παράδειγμα 6. Έστω το πρόβλημα απόφασης:

Δοθείσας μιας TM M , αποδέχεται η M όλες τις παλίνδρομες συμβολοσειρές;

Για να χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα Rice, χρειάζεται να αναδιατυπώσουμε το πρόβλημα έτσι ώστε να αναφέρεται σε μια κλάση γλωσσών. Πρώτα, εκφράζουμε το πρόβλημα απόφασης ως τη γλώσσα:

$$PALINDROMES_{TM} = \{\langle M \rangle \mid L(M) \text{ περιέχει όλες τις παλίνδρομες συμβολοσειρές}\}.$$

Μπορούμε τώρα να δούμε ότι η ιδιότητα που εξετάζουμε είναι η:

$$\mathcal{P}_{PALINDROMES} = \{L \mid L \text{ είναι αναγνωρίσιμη και περιέχει όλες τις παλίνδρομες συμβολοσειρές}\}.$$

Αυτή η κλάση, εκ των πραγμάτων, είναι κλάση αναγνωρίσιμων γλωσσών. Πρώτα αποδεικνύουμε ότι είναι μη-τετριμμένη. Η γλώσσα όλων των συμβολοσειρών Σ είναι μέλος της, ενώ η κενή γλώσσα $\emptyset$ (που είναι αναγνωρίσιμη) δεν είναι μέλος της. Άρα, σύμφωνα με το Θεώρημα Rice, η $PALINDROMES_{TM}$ είναι μη-διαγνώσιμη. $\square$

Ένα template

Τώρα δίνουμε ένα μοτίβο με το οποίο μπορεί κάποιος να χρησιμοποιήσει το Θεώρημα Rice. Έστω $\mathcal{P}$.

1. Αποδεικνύουμε ότι η $\mathcal{P}$ είναι μια γλώσσα ιδιότητας,
 - (α') Ελέγχουμε ότι η $\mathcal{P}$ αποτελείται από συμβολοσειρές της μορφής $\langle M \rangle$, όπου M είναι TM.
 - (β') Ελέγχουμε ότι για κάθε δύο TMs M_1, M_2 τ.ω. $L(M_1) = L(M_2)$ ισχύει ότι $M_1 \in \mathcal{P} \iff M_2 \in \mathcal{P}$.
2. Αποδεικνύουμε ότι η $\mathcal{P}$ είναι μη-τετριμμένη ιδιότητα,
 - (α') Δείχνουμε ότι υπάρχει TM M τ.ω. $\langle M \rangle \in \mathcal{P}$.
 - (β') Δείχνουμε ότι υπάρχει TM N τ.ω. $\langle N \rangle \notin \mathcal{P}$.
3. Χρησιμοποιούμε το Θεώρημα Rice για να καταλήξουμε ότι η $\mathcal{P}$ είναι μη-διαγνώσιμη.

Παράδειγμα 7. Δίνεται η γλώσσα

$$E_{TM} = \{\langle M \rangle \mid M \text{ είναι TM και } L(M) = \emptyset\}.$$

Θα αποδείξουμε ότι είναι μη-διαγνώσιμη χρήση του Θεωρήματος Rice.

Θα δείξουμε πρώτα ότι το E_{TM} αποτελεί ιδιότητα αναγνωρίσιμων γλωσσών. Προφανώς,

$$E_{TM} \subseteq \{\langle M \rangle \mid M \text{ είναι TM}\}.$$

Έστω τώρα TMs M_1 και M_2 τέτοιες ώστε $L(M_1) = L(M_2)$. Αν $\langle M_1 \rangle \in E_{TM}$, τότε $L(M_1) = \emptyset = L(M_2)$, άρα και $\langle M_2 \rangle \in E_{TM}$. Ομοίως, αν $\langle M_2 \rangle \in E_{TM}$, τότε και $\langle M_1 \rangle \in E_{TM}$. Άρα, $\langle M_1 \rangle \in E_{TM} \iff \langle M_2 \rangle \in E_{TM}$, οπότε το E_{TM} εξαρτάται μόνο από τη γλώσσα που αναγνωρίζει η μηχανή και όχι από την περιγραφή της. Επομένως είναι ιδιότητα αναγνωρίσιμων γλωσσών.

Για να εφαρμόσουμε το Θεώρημα Rice, πρέπει επίσης να δείξουμε ότι η ιδιότητα είναι μη-τετριμμένη. Θεωρούμε τις εξής δύο TMs:

$$M = \text{‘Με είσοδο } x : \\ 1. \text{ Αποδέξου το } x.\text{’}$$

Τότε $L(M) = \Sigma^*$, άρα $\langle M \rangle \notin E_{TM}$.

$$M = \text{‘Με είσοδο } x : \\ 1. \text{ Απέρριψε το } x.\text{’}$$

Τότε $L(N) = \emptyset$, άρα $\langle N \rangle \in E_{TM}$. Καθώς υπάρχει γλώσσα στη ιδιότητα (η κενή γλώσσα) και γλώσσα εκτός αυτής (η Σ^*), το E_{TM} είναι μη-τετριμμένη ιδιότητα αναγνωρίσιμων γλωσσών. Επομένως, εφόσον το E_{TM} είναι ιδιότητα αναγνωρίσιμων γλωσσών, και μη-τετριμμένη, το Θεώρημα Rice εφαρμόζεται. Άρα, η E_{TM}

Συνηθέστερες λανθασμένες εφαρμογές του Θεώρηματος Rice

Παράδειγμα 8. Θεωρήστε το πρόβλημα απόφασης:

Δοθείσας μιας TM M , είναι η $L(M)$ αναγνωρίσιμη;

Ο ισχυρισμός,

Η ιδιότητα ‘ L είναι αναγνωρίσιμη’ είναι μη-τετριμμένη, οπότε από το Θεώρημα Rice το πρόβλημα είναι μη-διαγνώσιμο.

είναι λανθασμένος. Η ιδιότητα είναι τετριμμένη. Στην πραγματικότητα το πρόβλημα είναι διαγνώσιμο με τον ακόλουθο διαγνώστη:

$$R = \text{‘Με είσοδο } \langle M \rangle \text{ αποδέξου’}.$$

□

Παράδειγμα 9. Μια κατάσταση μιας TM λέγεται συνηθισμένη αν δεν είναι ούτε κατάσταση αποδοχής ούτε κατάσταση απόρριψης. Θεωρήστε το πρόβλημα:

Δοθείσας μιας TM M , υπάρχει είσοδος w τέτοια ώστε η M να επισκέπτεται κάθε συνηθισμένη κατάσταση κατά τον υπολογισμό της;

Ο ισχυρισμός,

Η ιδιότητα ‘για κάποια είσοδο w η M επισκέπτεται όλες τις συνηθισμένες καταστάσεις’ είναι μη-τετριμμένη, άρα το πρόβλημα είναι μη-διαγνώσιμο.

δεν αποτελεί απόδειξη. Η έννοια ιδιότητα χρησιμοποιείται λανθασμένα. Για να απαντήσουμε στο πρόβλημα χρησιμοποιούμε την γλώσσα:

$$TOUR_{TM} = \{ \langle M \rangle \mid \exists w \text{ τέτοιο ώστε η } M \text{ επισκέπτεται όλες τις συνηθισμένες καταστάσεις της} \}.$$

Η $TOUR_{TM}$ πράγματι είναι μη-διαγνώσιμη, αλλήλ το Θεώρημα Rice **δεν** μπορεί να εφαρμοστεί για να το αποδείξει. Ο λόγος είναι ότι η συνθήκη:

‘η M επισκέπτεται όλες τις συνηθισμένες καταστάσεις’

αναφέρεται στη μηχανή και στη δομή της, όχι στη γλώσσα $L(M)$. Μπορούμε μάλιστα να δείξουμε ότι καμία ιδιότητα γλωσσών για τις οποίες οι γλώσσες είναι στο $TOUR_{TM}$. Έστω δύο μηχανές M_1 και M_2 τέτοιες ώστε,

$$L(M_1) = L(M_2), \quad \text{αλλά} \quad \langle M_1 \rangle \notin TOUR_{TM} \text{ και } \langle M_2 \rangle \in TOUR_{TM}.$$

Στο παρακάτω σχήμα δίνουμε ένα παράδειγμα.



$$\langle M \rangle \notin TOUR_{TM}$$

$$\langle N \rangle \in TOUR_{TM}$$

Και οι δύο μηχανές αναγνωρίζουν τη γλώσσα $\{0^n \mid n > 0\}$, αλλήλ η M έχει μια επιπλέον συνηθισμένη κατάσταση που χρησιμοποιείται μόνο σε μονοπάτια που καταλήγουν στην απορριπτική κατάσταση. Συνεπώς:

$$\langle M \rangle \notin TOUR_{TM}, \quad \langle N \rangle \in TOUR_{TM}.$$

□

Παράδειγμα 10. Θεωρήστε το πρόβλημα απόφασης:

Δοθέντων δύο μιας TM M, N , ισχύει ότι $L(M) = L(N)$;

Αυτό το πρόβλημα περιγράφεται από την γλώσσα $EQ_{TM} = \{\langle M, N \rangle \mid M, N \text{ TM ι.ω. } L(M) = L(N)\}$. Ο ισχυρισμός,

Η ιδιότητα ' $L(M) = L(N)$ ' είναι μη-τετριμμένη, άρα το πρόβλημα είναι μη-διαγνώσιμο.

είναι άστοχος, καθώς το Θεώρημα Rice δεν μπορεί να εφαρμοστεί σε προβλήματα που περιλαμβάνουν παραπάνω από μια γλώσσα. $\square$